

A FÖLD GRAVITÁCIÓS TERÉNEK KUTATÁSA REZONANS
MESTERSÉGES HOLDAK PÁLYAPERTURBÁCIÓINAK
FELHASZNÁLÁSÁVAL

Veres Ferenc

Egyetemi doktori értekezés

Miskolc, 1973. március 10.

Tartalom

I.	Bevezetés	3. oldal
II.	Tétel a Föld gravitációs tere paramétereinek meghatározhatóságáról orbitális részecskék bizonyos sokaságainak perturbációi alapján	18. oldal
III.	A bizonyított tétel reális szputnyik-feladatokra való alkalmazhatóságának elméleti és gyakorlati feltételei	28. oldal
IV.	Az $1/15$ összemérhetőségű körpályákon keringő szputnyikok inklinációja perturbálódásának vizsgálata	30. oldal
	Utószó	38. oldal
	Irodalom	39. oldal

I. Bevezetés

A mesterséges holdak megjelenésével új lehetőség nyílt a Föld gravitációs terének kutatására. Bebizonyosodott, hogy a gravitációs tér eltérései a gömbi szimmetriától jelentős zavargásokat okoznak a Földhöz közel keringő mesterséges holdak pályaelemeiben, és ezekből a zavargásokból meg lehet határozni a gravitációs teret jellemző bizonyos paramétereket. Az új lehetőség felismerése új tudományág, a dinamikus szputnyikgeodézia kialakulásához vezetett. Módszereit tekintve a dinamikus szputnyikgeodézia az égi mechanikával rokon, az általa szolgáltatott eredmények viszont olyan jellegűek, amelyeket korábban csak a gravimetria adott. Bizonyos területeken a dinamikus szputnyikgeodézia és a klasszikus gravimetria módszereivel meghatározott adatok közvetlenül össze is hasonlíthatók és egyesíthetők. A dinamikus szputnyikgeodéziai kutatásoknál általában a Föld gravitációs potenciáljának a következő alakjából szoktak kiindulni:

$$V = \frac{k^2 M}{r} \left[1 + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R_E}{a} \right)^l (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) P_l^m(\sin \vartheta) \right] \quad (1)$$

ahol k^2 a gravitációs állandó, M a Föld tömege, R_E a Föld átlagos egyenlítői sugara, C_{lm} és S_{lm} állandók, P_l^m asszociált Legendre-függvények.

Az (1) forma használatát a Nemzetközi Csillagászati

Unió is javasolta. [1] Ebben a dolgozatban is ezt a formát fogjuk felhasználni, meg kell azonban jegyezni, hogy bizonyos esetekben hasznos lehet más alak, például Lamé-függvények szerinti sor használata is. [2]

A Föld gravitációs potenciáljának eltérését az azonos tömegű gömbi szimmetrikus test potenciáljától az (1) kifejezésben a $C_{\ell m}$ és $S_{\ell m}$ koefficiensek jellemzik. A dinamikus szputnyikgeodéziai kutatások célja az, hogy a szputnyikok pályáinak zavargásaiból meghatározzák ezeket a $C_{\ell m}$ és $S_{\ell m}$ koefficienseket. Az irodalomban gyakran találkozunk kisé eltérő jelölésekkel is. Például:

$$\gamma_{\ell} = -C_{\ell 0} \quad ; \quad \gamma_{\ell m} = -C_{\ell m} \quad ; \quad K_{\ell m} = -S_{\ell m}$$

A tömegvonzási erőter potenciálja ezekkel a jelölésekkel a következő alakú:

$$V = \frac{k^2 M}{r} \left\{ 1 - \sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r} \right)^{\ell} \left[\gamma_{\ell} P_{\ell}(\sin \vartheta) + \sum_{m=1}^{\ell} (\gamma_{\ell m} \cos m\lambda + K_{\ell m} \sin m\lambda) P_{\ell}^m(\sin \vartheta) \right] \right\} \quad (2)$$

A γ_{ℓ} koefficiensekhez tartozó tagok csak a földrajzi szélességtől függenek, ezeket zonális harmonikusoknak nevezzük. A többi harmonikus úgy a földrajzi szélességtől mint a hosszúságtól függ. Ezek közül azokat, amelyeknél $m = \ell$ szektorális, amelyeknél pedig $m \neq \ell$ tesszerális harmonikusoknak nevezzük. A hosszúságtól is függő részt néha célszerű kisé átalakítani új

$$\gamma_{\ell m} = \sqrt{C_{\ell m}^2 + S_{\ell m}^2} \quad \text{és} \quad \lambda_{\ell m} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{S_{\ell m}}{C_{\ell m}}$$

állandók bevezetése útján. Ilyen módon a következő alakot kapjuk:

$$V = \frac{k^2 M}{r} \left\{ 1 - \sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r} \right)^\ell \left[\gamma_\ell P_\ell(\sin \vartheta) - \sum_{m=1}^{\ell} J_{\ell m} \cos m(\lambda - \lambda_{\ell m}) P_\ell^m(\sin \vartheta) \right] \right\} \quad (3)$$

Ha ismeretes valamely $C_{\ell m}$ /vagy ugyanúgy $S_{\ell m}$ / koeficiens értéke, akkor a hozzá tartozó harmonikusnak a szputnyik mozgására gyakorolt hatása meghatározható. Ha a szputnyik mozgására ható többi perturbáló tényező nem túl nagy, és így a kiszemelt szputnyik a vizsgált időintervallumon belül jó közelítésben egy Kepler-féle pályán mozog, akkor a $C_{\ell m}$ -hez tartozó harmonikus hatása elég jól meghatározható analitikus úton. Ehhez elő kell állítani a harmonikust a Kepler-féle /vagy esetleg ezekből leszámaztatható kanonikus/ pályaelemek függvényében /lásd a (4) sorfejtést/, az így előállított perturbációfüggvénnyel képezni kell a pályaelemek Lagrange-féle egyenleteit, majd integrálni kell ezeket az egyenleteket. A Lagrange-féle egyenletek integrálása általában a Kepler-féle pályából kiinduló iterációs módszerrel történik. A rövid periódusú tagok közül többnyire elegendő az első közelítésben kapottakat megőrizni, a hosszú periódusú és szekuláris tagokat viszont gyakran a második és harmadik közelítésből is figyelembe kell venni. Ha a szputnyik pályája az észleléseket felölelő intervallumon jelentősen eltér a Kepler-féle pályától, akkor a $C_{\ell m}$ harmonikustól származó perturbáció értékét numerikus úton határozzák meg. Ebben az esetben egy bo-

nyolultabb elméleti vagy experimentálisan meghatározott pályagörbe mentén integrálják a $C_{\ell m}$ harmonikustól származó gyorsulás megfelelő komponensét.

Ilyen módon tehát ha ismeretesek a szputnyik pályaelemei egy kezdeti t_0 időpontban, akkor meg lehet határozni annak a perturbációnak az értékét, amelyet a kiválasztott harmonikus t idő alatt okoz egy meghatározott pályaelemben. Mivel a perturbáció nagysága lineárisan függ a $C_{\ell m}$ koefficiensstől, a feladat könnyen meg is fordítható. Ha ismeretesek a mesterséges hold pályaelemei egy t_0 időpontban, és valamilyen módon sikerül meghatározni a $C_{\ell m}$ -hez tartozó harmonikus által valamely pályaelemre t idő alatt gyakorolt perturbáló hatás értékét, akkor ebből a $C_{\ell m}$ koefficienszt meg lehet határozni. A reális esetekben a szputnyik pályájára egyidejűleg hat az összes harmonikus és azon kívül még egy sor más perturbáló tényező is, ezért a kiválasztott $C_{\ell m}$ koefficiens hatását meglehetősen nehéz elkülöníteni a többi perturbáló tényező hatásától. A gyakorlatban egy adott észlelési anyag feldolgozásakor egyszerre csak a koefficiensek valamely csoportját határozzák meg, illetve javítják. Minden egyes szputnyik minden egyes pályaelemének egy adott iven meghatározott perturbációja lehetővé tesz a figyelembe vett koefficiensek között egy lineáris összefüggés megállapítását. Elvileg egyszerre annyi koefficienszt lehet meghatározni illetve javítani, ahány ilyen összefüggés /egyenlet/ felállítását az észlelési anyag lehetővé teszi. A gyakorlatban a figyelembe vett koefficiensek száma min-

dig kisebb az egyenletek számánál, és a fölös számú egyenletet a legkisebb négyzetek módszerével oldják meg. A legnehezebb gyakorlati feladat annak eldöntése, hogy az adott észlelési anyag feldolgozása során mely koefficiensket kell figyelembe venni és melyeket kell elhanyagolni. A vázolt módszer keretein belül ez a feladat teljesen egzaktul nem is oldható meg. Általában fel szokták tételezni, hogy a fő perturbációkat elsősorban az alacsonyabb fok és rendszámú harmonikusok okozzák. Ezen kívül sokat segít az is, hogy a pályáivek hosszaitól és elhelyezkedéseitől függően a kapott egyenletrendszerekben a gravitációs koefficiensok súlyai erősen eltérhetnek egymástól. Bizonyos pályáivek esetén előfordul, hogy a koefficiensok meghatározott csoportja nagyságrenddel nagyobb súlyokkal kerül az egyenletrendszerbe mint a többi koefficiens, és ezáltal a többitől csaknem függetlenül, sokkal nagyobb pontossággal határozható meg. Miután a kiválasztott koefficiensokat a fölös számú feltételi egyenletből a legkisebb négyzetek módszere segítségével meghatározták, a feltételi egyenletek közepes kvadrátikus hibája is ismeretessé válik. A feltételi egyenletek hibája vagy a felhasznált mérési adatok hibájából vagy a figyelembe nem vett harmonikusok hatásából származhat. Ha a talált hiba meghaladja azt az értéket, amelyet a pályaelemmeghatározás előzetes becslések alapján várható hibája okozhat, akkor a meghatározásba új koefficiensokat kell bevonni.

A dinamikus szputnyikgeodéziában a fentiekben vázolt módszeren kívül sok más eljárást is alkalmaznak. Ha a

szputnyik pályájának egy rövid ivén sok nagy pontosságú észlelés oszlik el, jól alkalmazható a koordináták perturbációinak vizsgálatára épülő eljárás, amelynek egyik legtökéletesebb változatát Izsák Imre dolgozta ki, és eredményesen alkalmazta a tesszerális harmonikusok és az állomáskoordináták meghatározására illetve javítására. Az eljárás lényege abban áll, hogy először előállítják az ismert perturbáló hatások figyelembevételével lehetséges elméleti pályák közül azt, amelyik a legjobban illeszkedik a megfigyelésekhez. A legjobb illeszkedés kritériumának az észlelt pozícióktól való eltérések négyzetösszegének minimumát tekintik. Már ennek a feladatrésznek a megoldásánál is nagy szerepet kapnak az egyenletmegoldások és az integrálkiszámítás numerikus módszerei. Az így meghatározott elméleti pályától való eltéréseket a meghatározandó illetve javítandó harmonikusok hatásának és az állomáskoordináták hibáinak tulajdonítják. Az eltérések várható értékeit az elsődlegesen kapott elméleti pálya mentén numerikus integrálással számítják ki. Az eltérések a keresett koefficiensok és az állomáskoordinátakorrekciók lineáris függvényei lesznek, és így, az elméleti pálya kiindulópontjául felhasznált egy pozíció kivételével minden egyes észlelt pozícióból egy lineáris egyenletet kapnak a keresett koefficiensok értékeire és az állomáskoordinátakorrekciókra. A kapott egyenletekből elvileg általában annyi változó határozható meg, ahány egyenlet rendelkezésre áll, a gyakorlatban azonban egyszerre csak ennél körülbelül 2-3-szor kevesebb paramétert javítanak.

Az egyenletrendszert számítógéppel, a legkisebb négyzetek módszerével oldják meg. Az egyenleteket az egyes állomások és a konkrét észlelés sajátosságainak megfelelően súlyozni is szokták. Ha valamely szputnyikra vonatkozóan több hónapra kiterjedő észlelési anyag áll rendelkezésre, amely lehetővé teszi a pályaelemek körülbelül naponkénti meghatározását, az anyagot olyan módszerrel szokták feldolgozni, amely lényegében hasonló az előzőekben vázolt-hoz, csak az észlelt pozíciók helyét az észlelésekből számított pályaelemrendszerek veszik át. Az eljárás még abban is eltér az előzőtől, hogy sokkal nagyobb szerepet kapnak benne az analitikus módszerek, konkrétan az égi mechanikai perturbációelmélet, valamint hogy itt nincs szükség az állomáskoordináták egyidejű javítására, mivel az előforduló pályaelemzavargások általában az állomáskoordináták hibáinál nagyságrendekkel nagyobb szputnyik-koordinátazavargásokkal állnak összefüggésben. Általánosságban leszögezhetjük, hogy a feldolgozásoknál használatos módszerek igen erősen függenek a rendelkezésre álló észlelési anyagtól. A különféle észlelési anyagok és feldolgozási módszerek előnyösen egészítik ki egymást. Az alacsonyabb fok és rendszámú, és főként a zonális harmonikusokat a pályaelemek szekuláris és hosszú periódusú perturbációiból, a magasabb fok és rendszámú harmonikusokat pedig a koordináták rövid periódusú perturbációiból lehet pontosabban meghatározni.

A mesterséges holdak megfigyelései alapján elsőnek az amerikai Smithsonian Intézetben határoztak meg főként

Izsák és Kozai munkássága nyomán egy meglehetősen pontos és átfogó paraméter-rendszert, amelyet 1966-ban tettek közzé. A paraméterek számát és pontosságát 1969-ig sikerült jelentős mértékben növelni, és ezért ekkor egy újabb átfogó paraméter-rendszert publikáltak "Smithsonian Standard Earth II. 1969" névvel. Ez utóbbi paraméter-rendszer tartalmazza a zonális harmonikusok értékeit γ_{21} -ig bezárólag és ezen kívül számos tesszerális és szektorális harmonikust. Ez utóbbiak között szerepel $\ell = 16$ -ig és $m = 16$ -ig az összes harmonikus, valamint ezen túl is számos harmonikus $\ell = 22$ -ig illetve $m = 14$ -ig. [4,5]

A gravitációs tér további harmonikusainak kutatása az azóta eltelt években is eredményesen folytatódott. Különösen nagy jelentősége van az észlelési technika fejlődésének, konkrétan annak a ténynek, hogy a lézeres távolságmérés valamint a Doppler-effektus alapján való sebességmeghatározás relatív pontosságát sikerült a Baker-Nunn kamerás fotografikus pozícióészlelés színvonalára, sőt sok esetben azon túl is emelni. A különböző észlelési módszerek együttes alkalmazása és különböző megfigyelő állomásokról való szinkron észlelések szervezése lehetővé teszi, hogy a megfigyelt szputnyik pályájának egy bizonyos ívét tisztán a mérésekből - dinamikai megfontolások igénybevétele nélkül - nagy pontossággal előállítsák. Ha a mérésekből meghatározott ívet összehasonlítják az ismert harmonikusok figyelembevételével számított elméleti ívvel, akkor a gravitációs térnek a feltételezettől való lokális eltérésére vonatkozóan igen pontos információkat

kapnak. Sok esetben figyelhetők meg olyan perturbációk, amelyek 30-ad vagy annál is magasabbfokú harmonikusoktól származhatnak.

Az elért jelentős eredmények ellenére meg kell azonban állapítanunk, hogy az újonnan meghatározott paraméterek száma és pontossága nem növekedett olyan mértékben, ahogy az észlelési pontosság növekedése ezt lehetővé tenné. A magasabb fok és rendszámok felé haladva a paraméterek meghatározása rohamosan növekvő gyakorlati nehézségekbe ütközik. Az első számú és legsúlyosabb probléma az, hogy az észlelőhálózat nem elég sűrű és nagyon egyenlőtlenül oszlik el a Föld felszínén. Ennek következtében a megfigyelések általában a pálya kis részére koncentrálódnak, és az egy fordulat során megfigyelt geocentrikus ivhossz közeli szputnyikok esetén még jól szervezett kváziszinkronészlelések mellett is ritkán haladja meg a 20° -ot, márpedig a felsőbbrendű tesszerális harmonikusok éppen a közeli szputnyikokra gyakorolják a legnagyobb perturbáló hatást. A közeli szputnyikok észlelését az is megnehezíti, hogy nagy a látszólagos szögsebességük, és ezért a fotografikus kamerákkal követéses üzemmódban csak ritkán lehet, és akkor is csak rövid iven fényképezni őket, és ezért csak a fényesebbekről lehet pontos pozíciókat kapni. A fényesebb szputnyikok azonban egyszersmint nagy méretűek is, és ezért pályájuk a légköri hatásoknak is nagy mértékben ki van téve, ami viszont jelentősen megnehezíti a geodéziai célú felhasználást. Ebben a vonatkozásban a közeljövőben várható előrehaladás, mivel több

ország is tervezi újfajta speciális geodéziai szputnyikok felbocsátását. Ezek többnyire kis méretűek és nagy töme-
gűek lesznek, és lehet lesz őket lézeres és Doppler-féle
módszerekkel észlelni, ami a fotografikus pozícióészlelés
esetleges hiánya esetén is elegendő adatot biztosít a ge-
odéziai célú kutatásokhoz. Olyan szputnyik felbocsátása
is tervbe van véve, amelynek belsejében egy kisebb mag
szabadon - csak a gravitációs erőknek kitéve - kering, és
az őt körülvevő szputnyik mindig alkalmazkodik a belsejé-
ben repülő maghoz, azaz segédrakéták segítségével állan-
dóan kompenzálja a légköri fékezőerők és a sugárnyomás
hatását, elkerülve a maggal való mechanikai érintkezést.
Az észlelőhálózat ritkasága és egyenlőtlen eloszlása jelen-
ti a jövő szempontjából is a legsúlyosabb és nehezen meg-
oldható problémát. Ennek az az oka, hogy egy jól felsze-
relt állomás létrehozása és üzemeltetése meglehetősen
költséges, az óceánok térségében pedig eleve csak a szí-
geteken lehetséges. Jelenleg az a helyzet, hogy csak Euró-
pa és Észak-Amerika egyes térségeiben működik annyi állo-
más, hogy a szomszédos állomások észlelési körzetei az
alacsonyban keringő /200-1000 km/ szputnyikok szempontjá-
ból átfedjék egymást, azaz hogy a szputnyik mindig lega-
lább egy állomás észlelői körzetén belül legyen. Ilyen
módon tehát a kiválasztott szputnyik mozgásáról az állomá-
sok munkájának jó koordinálása esetén kedvező észlelési
viszonyok között egy 20-30⁰-os ivre koncentrálna sok pon-
tos adat nyerhető, a pályáiv többi részére vonatkozóan
azonban leggyakrabban semmilyen közvetlen adat sem áll

rendelkezésre. Mivel az alacsonyan keringő szputnyikokat csak rövid pályáiveken lehet megfigyelni, és azt is főként csak a Föld ugyanazon térségeiben, a különböző harmonikusok hatásainak elkülönítése komoly gyakorlati nehézségekbe ütközik. Könnyen előfordulhat, hogy egy rövid pályáiven észlelt perturbáció egyaránt megmagyarázható több tucat különböző harmonikus vagy az ezekből képezhető végtelenül sok kombináció hatásával. A problémán valamilyest enyhít, ha különböző magasságokban és különböző irányokban haladó szputnyikokról állnak rendelkezésre adatok, de a koordináta perturbációk vizsgálatának fentebb vázolt módszerén belül ez sem tesz lehetővé teljes megoldást. A különböző harmonikusok hatásainak elkülönítését az is megnehezíti, hogy az újabb minőségi vizsgálatok szerint a koefficiensek csökkenő tendenciája, amely $l = 20$ -ig közelítőleg érvényes, valahol 20 után megtörik, és egy eddig meghatározatlan szakaszon növekedés váltja fel. Ilyen módon a figyelembe veendő harmonikusok számát előre megbecsülni igen nehéz. Megemlítjük még, hogy a magasabb fok és rendszámú harmonikusok felé haladva az elvégzendő számítások mennyisége is rohamosan nő, és ez nagy anyagi ráfordítást igényel, sőt további jelentős fejlesztés ezen az úton csak a számítástechnika fejlődésével párhuzamosan képzelhető el.

A pálya meg nem figyelt részén bekövetkező perturbációkra csak úgy következtethetünk, ha meghatározunk valamely két megfigyelt ivhez tartozó két közepes pályaelemrendszert. A két pályaelemrendszer közti eltérés a meg

nem figyelt iven elszenvedett perturbációk eredője. Valamely pályaelem változása az illető pályaelemre gyakorolt perturbáló hatásnak az eltelt idő alatt illetve a megtett iv mentén vett integráljával fejezhető ki. A Föld felszínének ugyanabból a térségéből jól megfigyelhető két pályaszakaszt általában körülbelül a szputnyik egy keringésének megfelelő idő vagy körülbelül egy nap választ el egymástól. Bár ez alatt az idő alatt a szputnyik pontos pályája nem ismeretes, a perturbációkat kifejező integrálokra előállított kifejezés elég pontos lesz, ha az integrál kiszámításának idejére a pályát a már ismert perturbációkat figyelembe vevő modellel közelítjük. Ennek oka egyrészt az, hogy a keresett ismeretlen erőter nem okozhat nagy perturbációkat, ezért a reális szputnyik mindvégig közel fog keringeni a modellben feltételezethez, másrészt az erőter folytonos és nem lehetnek benne nagy gradiensek sem, ezért két egymáshoz közel keringő objektumra közelítőleg azonos erő hat. A pályaelemváltozás tehát kifejezhető az ismert pályaelemeken és az ismeretlen gravitációs koefficienseken keresztül. Mint már említettük, ez a módszer a hosszú periódusú és szekuláris perturbációk felhasználása esetén effektív, és Kozai ilyen módon határozta meg a zonális harmonikusokat. Elvileg lehetséges volna ezzel a módszerrel tanulmányozni a többi perturbációt is, a rövid periódusú perturbációk amplitudója azonban kicsi, és a pályaelemekben olyan kis változásokat okoznak, amelyeket igen nehéz kimutatni, azaz elválasztani a többi, esetenként nagyságrendekkel is nagyobb perturbációtól. A tesszerális

harmonikusok első közelítésben nem okoznak szekuláris perturbációkat, a rezonans állapot közelében azonban okozhatnak nagy amplitudójú hosszú periódusú, az éles rezonancia idején pedig jelentős aperiódikus perturbációkat is.

E dolgozat megírásakor az volt a fő célom, hogy megmutassam a rezonans eredetű perturbációk geodéziai célú felhasználásának egy lehetséges útját. A dolgozatban ajánlott módszernek van egy sajátossága, amely megkülönbözteti a fentebb vázlatosan ismertetett módszerektől. Feltételeztem, hogy a megfigyelésekből meg lehet határozni a perturbációkat mint a pályaelemek folytonos függvényeit. Ennek a feltételezésnek a jogosultságát alátámasztja az a tény, hogy egyetlen szputnyik rezonans állapota is fennáll általában néhány hétig vagy hónapig, és a pálya helyzetét meghatározó pályaelemek ez alatt is jelentősen megváltoznak. Ennek következtében már egyetlen szputnyik rendszeres megfigyelése alapján is a pályaelemrendszerek bizonyos sokaságaihoz lehet meghatározni a megfelelő perturbációkat. Ezen kívül az is tény, hogy a keringő és valaha keringett szputnyikok száma rohamosan nő, és sok közöttük a hasonló pályákon keringő. Ennek következtében lehet találni a pályaelemek fázisterében olyan tartományokat, amelyeket elég sűrűn töltenek ki a reális szputnyikok pályaelemrendszereinek megfelelő pontok ahhoz, hogy e pontokban meghatározott perturbációkból jó közelítéssel lehessen folytonos függvényeket felépíteni. A módszer jellegzetessége tehát az, hogy a megfigyelésekből először folytonos függvényeket építünk fel, és ezekből bizonyos átalakítások révén

deduktív úton jutunk el a Föld gravitációs terét jellemző paraméterekhez. Ez a módszer - ellentétben a fentebb vázolt és a gyakorlatban eddig sikerrel alkalmazott módszerekkel - nem követel meg semmiféle apriorisztikus feltevést arra vonatkozóan, hogy mely harmonikusok okozzák a talált perturbációkat és milyen nagyságrendűek ezek a harmonikusok. A módszer előnyös tulajdonsága az is, hogy az általa megkövetelt pályaelemek egy aránylag rövid, $10-20^{\circ}$ hosszú ív megfigyelése alapján már meghatározhatók, és az ehhez szükséges megfigyelések többnyire elvégezhetők egy nem túl nagy körzet - például Európa - valamely pontjából. Ritka az olyan eset, hogy derült idő esetén egy szputnyikot egy nap folyamán egyetlen európai állomásról se lehessen megfigyelni. Ha a rezonancia lefutása nem túl gyors, elegendő, ha 2-3 naponként áll rendelkezésünkre egy-egy pályaelemrendszer, és szervezett észlelési kooperáció esetén erre joggal lehet is számítani, különösen ha figyelembe vesszük, hogy szükség esetén Európán kívül végzett észlelések adatait is be lehet vonni a feldolgozásba. Ha a megfigyelt szputnyikok pályaelemeinek eloszlása kedvező, a főként vagy kizárólag európai észlelések alapján fel lehet építeni a feldolgozáshoz szükséges experimentális függvényeket, és ezek a függvények a Föld egész gravitációs terére vonatkozóan fognak információkat tartalmazni. A módszer elvileg alkalmazható volna a nem rezonans esetben is, alkalmazásának azonban határt szab az észlelői pontatlanság és az ebből származó hibák a számított pályaelemekben. A rezonans esetek vizsgálata mindenesetre magában is elég

széles kutatási területté válhat, hiszen élettartama alatt csaknem minden szputnyik áthalad többféle rezonans állapoton is, miközben a megfigyelésekből minden rezonans állapot idején a koefficiensek más-más csoportjára vonatkozóan nyerhető információ.

Az utóbbi években több szerző is rámutatott, hogy a rezonans szputnyikok perturbációinak vizsgálata eszközül szolgálhat a Föld gravitációs paramétereinek meghatározásához. E szputnyikok vizsgálata azért előnyös, mert bizonyos perturbáló tényezők hatása rájuk nézve huzamos időn keresztül összegeződik, és ezáltal könnyebben kimutathatóvá, pontosabban mérhetővé válik. Megnehezíti viszont a szputnyikok ^t perturbációinak felhasználását az a tény, hogy a klasszikus, a Kepler-féle megoldásból kiinduló iterációs módszerrel a rezonans perturbációk kis osztók megjelenése következtében nem írhatók le. A helyzetet bonyolítja az is, hogy a pálya evolúcióját általában más eredetű, erősebb perturbáló tényezők határozzák meg, elsősorban a levegő ellenállása folytán fellépő fékeződés valamint a zonális harmonikusok és a Hold hatása. Ez utóbbi körülmény nagy mértékben megnehezíti az általános rezonans feladat megoldását, mivel minden konkrét feladatban a rezonans tagokkal együtt egy sor más perturbáló tényezőt is figyelembe kell venni. A kitűzött gyakorlati cél azonban más úton is elérhető, és pedig valamely pályaelem változási sebességének a pályaelemek experimentálisan meghatározott közepes értékei függvényében történő vizsgálata révén. A továbbiakban ezzel a feladattal foglalkozunk. A II. fejezetben

megfogalmazunk egy egzakt matematikai tételt, amely egyértelmű kapcsolatot állapít meg különböző, de egymással kapcsolatban lévő halmazokon definiált függvények között. A következő fejezetekben az elmélet gyakorlati alkalmazhatóságának kérdését vizsgáljuk, és számpéldát is adunk.

II. Tétel a Föld gravitációs tere paramétereinek meghatározhatóságáról orbitális részecskék bizonyos sokaságainak perturbációi alapján

Legyen ω_g a Föld forgási szögsebessége; σ a Föld körül Kepler-féle ellipszispályákon azonos n közepes mozgással keringő részecskék /határértékben nulla tömegű és kiterjedésű testek/sokasága, miközben ω_g és n összemérhetők, azaz

$$\frac{\omega_g}{n} = \frac{p_1}{p_2},$$

ahol p_1 és p_2 relativ prim számok. A σ sokaság minden eleme hat független paraméterrel jellemezhető. Erre a szerepre az $a, e, i, \omega, \Omega, M_0$ Kepler-féle pályaelemeket választjuk. Feltételezzük, hogy ismeretes minden σ -hoz tartozó részecske e_k pályaelemére a rezonans harmonikusok összessége által gyakorolt perturbáló hatás egy keringésre számított φ_{e_k} közepes értéke. Azokat a harmonikusokat tekintjük rezonansoknak, amelyek a hosszúság szerint $2\pi/m$ periódussal periódikusak, ahol m a p_2 többszöröse $/m = j p_2 /$. Ha σ tartalmaz egy két paraméter szerint folytonos halmazt, melynek egyik változó paramétere Ω

vagy M_0 , másik változó paramétere pedig i vagy ω , miközben a többi négy paraméter az egész halmazra nézve állandó, akkor a négy rögzített paraméter bizonyos értékei mellett az összes rezonans harmonikus koefficiensei /illetve amplitudói/ és maximumaik hosszúságai egyértelműen meghatározhatók. A négy rögzített paraméter alkalmazása előre megállapítható.

Bizonyítás.

Mint ismeretes [8], a geoidnak a gömbtől való eltérését kifejező perturbációfüggvény a Kepler-féle pályaelemek és a közepes anomália függvényében a következő alakban állítható elő:

$$R = -\frac{\mu}{R_E} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \gamma_{lm} \left(\frac{R_E}{r}\right)^{l+1} \sum_{p=0}^l \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{lmp}(i) X_k^{-l-1, l-2p} (e) \begin{cases} \cos \psi & l-m \text{ páros} \\ \sin \psi & l-m \text{ páratl.} \end{cases} \quad (4)$$

ahol: $\psi = (l-2p)\omega + kM + m(\Omega - \Theta_g - \lambda_{lm})$;

γ_{lm} és λ_{lm} a megfelelő harmonikus koefficiense és maximumának hosszúsága; Θ_g Greenwich óraszöge; R_E a Föld közepes egyenlítői sugara;

$$F_{lmp} = \sum_{g=0}^{\min\{p, E(\frac{l-m}{2})\}} A_{l,m,g} \sin^{l-m-2g} i \sum_{h=0}^m B_{l,m,g,p,h} \cos^h i \quad (5)$$

$$A_{l,m,g} = \frac{(2l-2g)!}{g!(l-g)!(l-m-2g)!} 2^{2l-2g} (-1)^{E(\frac{l-m}{2})}$$

$$B_{l,m,g,p,h} = \binom{m}{h} \sum_c \binom{l-m-2g+h}{c} \binom{m-h}{p-g-c} (-1)^c$$

$E(x)$ egész rész függvény; c kiterjed minden értékre, melyre a binomiális együtthatók értéke nem nulla; $X_k^{-l-1, l-2p}$ Hansen-féle koeficiensek, melyek például a következő alakban állíthatók elő:

$$X_k^{-l-1, l-2p} = (1 + \beta^2)^l \sum_{s=0}^{\infty} (-\beta)^s \left\{ {}_1^s X_k^{-l-1, l-2p} + {}_2^s X_k^{-l-1, l-2p} \right\}$$

$${}_1^s X_k^{-l-1, l-2p} = \gamma_{k-l+2p-s} (ke) \binom{-2l+2p}{s} F(2l-2p+s, 2p, s+1; \beta^2)$$

$${}_2^s X_k^{-l-1, l-2p} = \gamma_{k-l+2p+s} (ke) \binom{-2p}{s} F(2p+s, 2l-2p, s+1; \beta^2)$$

ahol $\beta = e / (1 + \sqrt{1 - e^2})$; γ Bessel függvények; F hipergeometriai függvények.

Csak a rezonans harmonikusokból kapott tagokat meghagyva és egy keringésre átlagolva a következő perturbációfüggvényt kapjuk:

$$\bar{R} = -\frac{k}{R_E} \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{l=xp_2}^{\infty} \gamma_{l, xp_2} \left(\frac{R_E}{a}\right)^{l+1} \sum_{p=0}^l F_{l, xp_2, p} (i) X_{xp_1}^{-l-1, l-2p} (e) \begin{cases} \cos \psi \\ \sin \psi \end{cases} \begin{matrix} l-xp_2 \text{ páros} \\ l-xp_2 \text{ páratl.} \end{matrix} \quad (6)$$

$$\psi = (l-2p)\omega + xp_1 M_0 + xp_2 (\Omega - \Theta_{g_0} - \lambda_{l, xp_2})$$

ahol M_0 és Θ_{g_0} az epochára vonatkoztatott közepes anomália és greenwichi csillagidő.

Érdemes megjegyezni, hogy ha az átlagolást nem egy fordulatra, hanem p_1 csillagnapra /más szóval p_2 fordulatra/ végezzük el, akkor a nem rezonans harmonikusokból származó tagok automatikusan kiesnek a zonális harmonikusokból

származó szekuláris tagok kivételével, melyeknél $m = 0$
és $k = 0$.

A pályaelemek Lagrange egyenletei a következő alakúak lesznek: / Az összegezés jeleit valamint az F és X függvények indexeit elhagytuk, emlékezve arra, hogy az összegezés mindenütt a (6) képlettel analóg módon történik./

$$\frac{R_E}{\mu} \frac{n a}{2} \frac{da}{dt} = \int_{\ell, \alpha p_2} \left(\frac{R_E}{a}\right)^{\ell+1} F(i) X(e) \alpha p_1 \begin{Bmatrix} \sin \psi \\ -\cos \psi \end{Bmatrix} \quad (7a)$$

$$\frac{R_E}{\mu} \frac{e n a^2}{\sqrt{1-e^2}} \frac{de}{dt} = \int_{\ell, \alpha p_2} \left(\frac{R_E}{a}\right)^{\ell+1} F(i) X(e) [\sqrt{1-e^2} \alpha p_1 - (\ell-2p)] \begin{Bmatrix} \sin \psi \\ -\cos \psi \end{Bmatrix} \quad (7b)$$

$$\frac{R_E}{\mu} \sqrt{1-e^2} n a^2 \sin i \frac{di}{dt} = \int_{\ell, \alpha p_2} \left(\frac{R_E}{a}\right)^{\ell+1} F(i) X(e) [(\ell-2p) \cos i - \alpha p_2] \begin{Bmatrix} \sin \psi \\ -\cos \psi \end{Bmatrix} \quad (7c)$$

$$\frac{R_E}{\mu} \sqrt{1-e^2} n a^2 \sin i \frac{d\Omega}{dt} = - \int_{\ell, \alpha p_2} \left(\frac{R_E}{a}\right)^{\ell+1} F'(i) X(e) \begin{Bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{Bmatrix} \quad (7d)$$

$$\frac{R_E}{\mu} \sqrt{1-e^2} n a^2 \sin i \frac{d\omega}{dt} = - \int_{\ell, \alpha p_2} \left(\frac{R_E}{a}\right)^{\ell+1} \left[\sin i F(i) \frac{1-e^2}{e} X'(e) - \cos i F'(i) X(e) \right] \begin{Bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{Bmatrix} \quad (7e)$$

$$\frac{R_E}{\mu} n a^2 \frac{dM_0}{dt} = - \int_{\ell, \alpha p_2} \left(\frac{R_E}{a}\right)^{\ell+1} \left[2(\ell+1) X(e) - \frac{1-e^2}{e} X'(e) \right] F(i) \begin{Bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{Bmatrix} \quad (7f)$$

A tétel feltételei szerint a (7) egyenletek bal oldala adva van, mint két paraméter folytonos függvénye φ_{e_1, e_2} . Ahhoz, hogy az $\int_{\ell, \alpha p_2}$ koeficienssek egyértelműen meghatározhatók legyenek, szükséges és elégséges, hogy a bal oldal

a jobb oldalon álló függvények szerinti sor alakjában egyértelműen legyen előállítható. Az előállítás egyértelműségének az a feltétele, hogy a jobb oldalon a legalább egy index szerint különböző $J_{\ell, \alpha p_i}$ koefфициensek szorzójaként szereplő függvények lineárisan függetlenek legyenek. Mint mondtuk, az egyik paraméter Ω vagy M_0 . Ezek a mennyiségek csak a trigonometrikus részek argumentumaiban fordulnak elő a következő formában:

$$\Psi = (\ell - 2p)\omega + \alpha p_1 M_0 + \alpha p_2 (\Omega - \Theta_{yc} - \lambda_{\ell, \alpha p_2})$$

A trigonometrikus függvények rendszerén belüli lineáris függetlenség következtében megállapíthatjuk, hogy a különböző α értékekhez /vagy $m = \alpha p_2$ -hez/ tartozó függvények lineárisan függetlenek lesznek. Meg kell még követelnünk, hogy Ω -nak vagy M_0 -nak αp_i illetve αp_1 -szeres értéke trigonometrikus függvénye koefфициensének a másik öt paraméterből képződött tényezője ω vagy i változásakor ne legyen azonosan nulla, akkor ugyanis $J_{\ell, \alpha p_2}$ nem volna meghatározható. Az \bar{R} perturbációfüggvény valamint az F és X függvények analitikusságának következtében ez a követelmény a négy rögzített paraméternek csaknem az összes lehetséges kombinációja esetén teljesül, azaz bármely koefфициens bármely paraméter szerinti nullpontjainak sokasága megszámlálható halmazzal alkot. Egyébként, ha a nevezett koefфициens valamely α_1 értékénél azonosan nulla, ez nem zavarja az összes többi, $J_{\ell, \alpha_1 p_1}$ -en kívüli koefфициens meghatározhatóságát.

A tétel feltételei szerint a másik paraméter i vagy

ω . Az ω szintén csak a trigonometrikus függvények argumentumában fordul elő, miközben minden l értékhez $l+1$ függvény tartozik, melyeknek argumentumaiban ω szorzói különbözőek. Ezek között található az a két függvény is, melyeknél ω szorzójának abszolút értéke a legnagyobb,

azaz $\left\{ \begin{matrix} \cos l\omega \\ \sin l\omega \end{matrix} \right\}$ és $\left\{ \begin{matrix} \cos -l\omega \\ \sin -l\omega \end{matrix} \right\}$.

Mint látjuk, a legnagyobb abszolút értékű szorzó a különböző l -ek esetében különböző, és ^{ez} biztosítja a lineáris függetlenséget. Itt is meg kell természetesen követelni, hogy azoknak a függvényeknek a koefficiensei, melyeknek argumentumában ω szorzója a legnagyobb, ne legyenek azonosan nullák. Ha valamely l -nél $l\omega$ függvényének koefficiense azonosan nulla, és a többi ω -függvény koefficienseinek valamelyikére ez nem érvényes, akkor ez a körülmény - ellentétben az előző esettel - megzavarhatja az γ_{l, ρ_l} koefficiensek meghatározhatóságát más l értékek esetére is, mivel előfordulhat, hogy a különböző l -ekhez tartozó függvények között lineáris összefüggés lesz. Az ilyen kritikus pontok eloszlásának tanulmányozása további kutatás témájául szolgálhat, azonban leszögezhetjük, hogy az ilyen pontok bármely paraméter szerint megszámlálható halmazzal alkotnak, és léteznek olyan pontok, amelyekben nem lép fel különlegesség.

Az i inklináció a (γ) egyenletek jobb oldalán az $F(i)$ függvénynek és $F'(i)$ deriváltjának alakjában van jelen. A (6) képlet megmutatja, hogy az F_{emp} függvény $\sin i$ -ből és $\cos i$ -ből képzett l -edfokú polinom. Ugyanez vonat-

kozik $F'(i)$ -re is. Ezért a (γ) egyenletek közül bármelyiknek a jobb oldalán az $\gamma_{\ell, x p_\ell}$ koefficiens szorzójaként ℓ -edfokú, illetve a (γ_c) és (γ_e) esetekben $\ell+1$ -edfokú polinom áll, az ilyen polinomok lineáris függetlensége folytán pedig a különböző ℓ -ekhez tartozó függvények valóban lineárisan függetlenek lesznek. A kritikus pontok problémáját illetően a helyzet teljes mértékben analóg az ω szerinti függvények esetével. Az eddigiekben mindenütt az $\gamma_{\ell m}$ koefficiens meghatározhatóságáról beszéltünk, de az elmondottak ugyanigy érvényesek a

$C_{\ell m} = \gamma_{\ell m} \cos m \lambda_{\ell m}$ és $S_{\ell m} = \gamma_{\ell m} \sin m \lambda_{\ell m}$,
következésképpen pedig a

$$\lambda_{\ell m} = \frac{1}{m} \arctg \frac{S_{\ell m}}{C_{\ell m}}$$

értékekre is. A tétel bizonyítását ezzel befejeztük.

1. megjegyzés. A tétel megfogalmazásánál azt követeltük meg, hogy a (γ) egyenletek valamelyikének bal oldala az argumentumok valamely kétváltozós folytonos halmazán legyen megadva, a bizonyításban pedig feltételeztük, hogy ismeretesek e függvények Fourier-koefficiensei a trigonometrikus függvények rendszere szerint. Az összes többi szereplő függvények analitikussága és a sorok egyenletes konvergenciája következtében /ez utóbbi körülmény egyrészt az adott test erőterének a szférikus függvények szerinti sorbafejthetőségi tételéből, másrészt a valódi anomália adott függvényének a közepes anomália többszörösei szerinti sorbafejthetőségi tételéből következik/ matematikai

szempontból ez megengedhető. A gyakorlatban azonban a kísérletileg meghatározandó függvényt általában véges számú pontban mért értékei alapján építjük fel, és a Fourier-koefficiensek rendszerint akkor határozhatók meg a legpontosabban, ha a mérési pontok egyenletesen oszlanak el az egész értelmezési tartományban.

2. megjegyzés. A bizonyítás során nem vizsgáltuk a mérésekből meghatározott bal oldalnak a jobb oldalon álló függvények szerinti sorbafejtése létezésének kérdését. Előfordulhat, hogy a bal oldal tartalmaz a jobb oldal minden függvényére ortogonális komponenst. Mivel a bal oldalt előzetesen mérések alapján határozzuk meg, ilyen esetben feltételezhető, hogy vagy a mérések voltak pontatlanok, vagy a rezonans harmonikusok hatását nem sikerült helyesen elkülönítenünk a többi perturbációtól. Matematikai szempontból ez nem zárja ki a feldolgozás lehetőségét, de kétséges teheti a felhasznált adatok tényleges pontosságát.

3. megjegyzés. A bizonyítás során csak a jobb oldalon álló függvények lineáris függetlenségének néhány elégséges feltételére mutattunk rá. A szükségesség kérdése több irányban is nyitva maradt. Lehetséges például, hogy olyan halmazok is szolgálhatnak a nehézségi erőter koefficienseinek meghatározására, melyeknek változó paramétere ϵ . Az is lehetséges, hogy bizonyos kritikus pontokban, ahol a $\cos \pm \ell \omega$ és $\sin \pm \ell \omega$ függvények koefficiense azonosan nulla, a különböző ℓ -ekhez tartozó függvények ω szerinti lineáris függetlensége érvényben marad.

4. megjegyzés. A bizonyított tétel könnyen általáno-

sítható a nem rezonans pályák esetére is. A formális különbség csak annyi, hogy a trigonometrikus rész közepes anomália szerinti átlagolása után a

$$\begin{Bmatrix} \cos \Psi \\ \sin \Psi \end{Bmatrix}$$

mennyiség helyett a következőt kapjuk:

$$\frac{\sin y}{y} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left[(\ell - 2p)\omega + y + m \left(\Omega - \theta_{gc} + \frac{\omega_g}{n} M_0 - \lambda_{\ell m} \right) \right]$$

ahol

$$y = \pi \left(k - \frac{m \omega_g}{n} \right)$$

Ha a Lagrange egyenleteket ezzel az átlagolt perturbációfüggvénnyel állítjuk össze, és valamelyik egyenlet jobb oldalát mint Ω vagy M_0 függvényét vizsgáljuk látni fogjuk, hogy a különböző m értékekhez tartozó függvények lineárisan függetlenek lesznek. A különböző ℓ értékekhez tartozó függvények /ugyanolyan feltételek mellett, mint a rezonans esetben/ i vagy ω szerint lesznek lineárisan függetlenek. Ha a 4 rögzített paraméter olyan értékeket vesz fel, hogy a belőlük képződő koefficiensok közül egy sem /vagy legalábbis azok nem, melyek egy adott ℓ esetén az ω szerinti függvények közül az $\ell \omega$ argumentumú, illetve az i szerinti trigonometrikus polinomok esetén a maximális fokszerű komponens szorzójaként szerepelnek/ egyenlő nullával, akkor a vizsgált egyenlet jobb oldalán teljes kétdimenziós ortogonalizálható függvényrendszert kapunk, amely szerint egyértelműen sorbafejthető bármely experimentálisan meghatározott bal oldal, és ezáltal egyszerre meghatározható az összes $\gamma_{\ell m}$ és $\lambda_{\ell m}$ koefficiens.

5. megjegyzés. Az adott pályaelemre gyakorolt perturbáló hatás az erőter minden P pontjában előállítható az erőter komponenseinek lineáris kombinációjaként. A kombináció koefficiensei a P pont koordinátáitól és a pályaelemektől függenek. Az általunk kitűzött feladat tehát a következő integrálegyenletes formában is megfogalmazható:

$$\int_0^{2\pi} D_{e_1, e_2}^{e_R} U[P(e_1, e_2, M)] dM = \varphi_{e_R}(e_1, e_2)$$

$$\nabla^2 u = 0$$

ahol $D_{e_1, e_2}^{e_R}$ differenciális operátor, amely az erőternek az e_R pályaelemre ható komponensét állítja elő. A D operátor és a P pont különböző törvények szerint függenek az e_1, e_2 pályaelemektől. A 4 másik pályaelemet az adott feladatban konstansnak tekintjük. $\varphi_{e_R}(e_1, e_2)$ adott függvény; ∇^2 Laplace-operátor. Mint látjuk, egy két egyenletes határérték-feladattal van dolgunk, ahol az egyik egyenlet a Laplace-egyenlet, a másik pedig egy speciális alakú integro-differenciálegyenlet, amelyben az ismeretlen függvény differenciálás jele /amely az irányát és koefficiensét tekintve a P ponttól és még két paramétertől függ/ és adott vonal mentén számítandó integrálás jele alatt áll.

III. A bizonyított tétel reális szputnyik- feladatokra való alkalmazhatóságának elméleti és gyakorlati feltételei

Hogy a fenti tétel a gyakorlatban alkalmazható legyen, szükségünk van valamely közepes pályaelemrendszer ismeretére az egészvizsgált időtartamra vonatkozóan. A közepes pályán mozgó fiktív részecskének nem szabad túlságosan messzire eltávolodnia a reális szputnyiktól. A maximális eltérésnek legalább egy nagyságrenddel kisebbnek kell lennie, mint az erőter vizsgált harmonikusainak két maximuma közti távolság. Ha ez teljesül, akkor a megfelelő harmonikusok bizonyos pontossági határokon belül mindkét objektumra egyformán fognak hatni. A mesterséges holdak mozgásának tanulmányozása arra a tapasztalatra vezetett, hogy egy drakonikus periódus /két egyenlitői áthaladás közti időtartam/ alatt a szputnyik reális pályája csak kevéssé tér el valamely Kepler-féle pályától. Az eltérés ritkán halad meg 10 km-t, a viszonylag közeli szputnyikok esetében pedig /melyeknek perigeummagassága 200-1000 km/ , amelyek ezen kívül körhöz közeli pályán keringenek, mindössze néhányszor tíz métert. A Föld méreteihez képest ezeket az eltéréseket kicsiknek tekinthetjük, legalábbis a nem túlságosan nagy rendszámú harmonikusok tanulmányozásánál. Következésképpen nem követünk el nagy hibát akkor, amikor a reális pálya mentén vett integrálást a közepes pálya mentén vett integrálással helyettesítjük. A

tapasztalat azt mutatja, hogy a közepes pályaelemek M_0 kivételével lassan változnak, és az esetek többségében elég hosszú időintervallumon belül az idő lineáris függvényeinek tekinthetők, sőt az i inklináció állandónak.

Az elmélet alkalmazhatóságának másik feltétele az, hogy ismernünk kell valamely e_a pályaelem deriváltjának átlagos értékét a rezonans harmonikusok hatása alatt. Ez elég pontosan biztosítható például akkor, ha sikerül meghatározni e_a két pillanatnyi értékét, melyeket p_2 egész fordulatnak megfelelő intervallum választ el egymástól. Ezen az intervallumon a többi tesszerális harmonikus hatása kiátlagolódva éppen nulla lesz, s így a redukciókat csak a többi perturbáló hatás figyelembevételével kell elvégezni. Felhasználhatunk természetesen bármely más elég pontosan meghatározott pályaelemrendszert is, de nem szabad megfeledkezni arról, hogy értelem szerint a (7) egyenletek bal oldalain olyan deriváltak állnak, melyeket egy fordulat által elválasztott két pillanatnyi érték /oszkuláló pályaelem/ különbsége alapján határoztunk meg.

A rezonans szputnyikok tanulmányozásának előnye abban rejlik, hogy rájuk nézve a rezonans harmonikusok perturbáló hatása hosszú időn keresztül összegeződik, és ezáltal könnyebben kimutathatóvá válik. A hatás ismétlődésének az a feltétele, hogy minden p_2 fordulat után a szputnyik a Földhöz viszonyítva ugyanolyan helyzetbe kerüljön. A gyakorlatban ez pontosan nem realizálódik. Az említett követelmény akkor teljesül legtökéletesebben, ha a közepes pályaelemek kielégítik a következő egyenletet [11]

$$\dot{\omega} + n + \frac{p_2}{p_1} (\dot{\Omega} - \omega_g) = 0$$

Mivel $\dot{\omega}$ és $\dot{\Omega}$ sok esetben meglehetősen nagy értékeket is felvehet, a reális rezonans szputnyikok Kepler-féle közepes mozgásai /és a pályák fél nagytengelyei/ észrevehetően eltérhetnek a II.-ben elfogadott

$$n = \frac{p_2}{p_1} \omega_g$$

értéktől. A (7) képletek érvényben maradnak, de az egyazon összemérhetőségi halmazhoz tartozó különböző pályák esetén a értéke más-más lesz a Föld középpontjától való reális átlagos távolságnak megfelelően.

A feladat általános vizsgálatát ezzel befejezzük, és áttérünk egy konkrét rezonans feladat vizsgálatára, melyet számpéldával is illusztrálni tudunk.

IV. Az 1/15 összemérhetőségű körpályákon keringő szputnyikok inklinációja perturbálódásának vizsgálata

Legyen σ a Föld körül $p_1/p_2 = 1/15$ összemérhetőségű csaknem kör alakú pályákon / $e \rightarrow 0$ / keringő szputnyikok sokasága. A (7c) egyenlet erre az esetre a következő alakot ölti:

$$\frac{R_E}{\mu} a^2 \sin i \frac{di}{dt} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\ell=15\lambda}^{\infty} \gamma_{\ell, 15\lambda} \left(\frac{R_E}{a}\right)^{\ell+1} F_{\ell, 15\lambda, \frac{\ell-\lambda}{2}} (\cos i - 15) \cdot \lambda \begin{Bmatrix} \sin \psi \\ -\cos \psi \end{Bmatrix} \quad (8)$$

ahol $\psi = \lambda (M_0 + \omega) + 15\lambda (\Omega - \theta_{g0} - \lambda_{\ell, 15\lambda})$

Uj λ_{Ω} változót vezetünk be:

$$\lambda_{\Omega} = \frac{1}{15} (M_0 + \omega) + \Omega - \Theta_{y_0}$$

Könnyen belátható, hogy λ_{Ω} az egyenletői metszéspont hosszúsága Greenwich-től keletre számítva.

Eredményül a következőt kapjuk:

$$\psi = 15 \times (\lambda_{\Omega} - \lambda_{e,15x})$$

A (8) egyenlet mutatja, hogy $e \rightarrow 0$ következtében $p = (\ell - x)/2$. Mivel p egész szám, ℓ és x egyszerre páros vagy páratlan. Következésképpen a kitűzött feladat elvileg a következő indexű paraméterek meghatározását teszi lehetővé:

- (15, 15) ; (17, 15) ; (19, 15) . . . stb.
- (30, 30) ; (32, 30) ; (34, 30) . . . stb.
-
- stb.

Mint látható, a különböző x értékekhez tartozó függvények λ_{Ω} szerint lineárisan függetlenek lesznek.

Tételezzük fel, hogy a (8) egyenlet bal oldalán sikerült meghatározni az

$$a \cos 15 \lambda_{\Omega} + b \sin 15 \lambda_{\Omega}$$

alakú komponenst minden i értékhez. Erre az esetre $x = 1$, és a (8) egyenlet a következő alakot veszi fel:

$$\frac{R_E}{\mu} \frac{a^2 n m i}{15 - \cos i} \frac{di}{dt} = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{R_E}{a}\right)^{15+2s+1} F_{15+2s, 15, \gamma+s}(i) \cdot$$

$$\cdot (S_{15+2s, 15} \cos 15 \lambda_{\Omega} - C_{15+2s, 15} \sin 15 \lambda_{\Omega}) \quad (9)$$

ahol $C_{\ell m} = J_{\ell m} \cos m \lambda_{\ell m}$ és
 $S_{\ell m} = J_{\ell m} \sin m \lambda_{\ell m}$.

Mivel a perturbáló hatás ismétlődésének optimális fel-
 tétele eltér a Kepler-féle mozgás összemérhetőségének tör-
 vényétől, R_E/a az i inklináció függvénye lesz, a gya-
 korlat azonban azt mutatja, hogy R_E/a eltérése egy meg-
 felelő R_E/a_0 értéktől két nagyságrenddel kisebb lesz
 magától az értéktől. Ezért R_E/a -t, legalábbis első kö-
 zelitésben, állandónak tekinthetjük. Az S és C koeffi-
 ciensek egymástól függetlenül határozhatók meg, mivel a
 (9) egyenlet bal oldalán $\cos 15 \lambda_{\Omega}$ és $\sin 15 \lambda_{\Omega}$ koefficien-
 sei szintén külön-külön meghatározhatók. Az S -ek megha-
 tározásához a következő egyenletet kapjuk:

$$a(i) = \sum_{s=0}^{\infty} S'_s F'_s(i) \quad \text{ahol } a(i) \text{ adott függvény;}$$

$$S'_s = \left(\frac{R_E}{a}\right)^{15+2s+1} S_{15+2s,15} \quad ; \quad F'_s = F_{15+2s,15,7+s}$$

A II.-ben megmutattuk, hogy az F'_s függvények line-
 árisan függetlenek, következésképpen az alábbi formulák
 szerint felépíthető belőlük az E_s ortonormált függvény-
 rendszer /Gram-Schmidt féle ortogonalizációs eljárás/ [7]

$$E_s(i) = \frac{F''_s(i)}{\|F''_s(i)\|}$$

$$F''_0(i) = F'_0(i) \quad ; \quad F''_{s+1}(i) = F'_{s+1}(i) - \sum_{\ell=0}^s (E_{\ell}, F'_{s+1}) E_{\ell}(i)$$

Az F'_s függvény a következőképpen fejezhető ki $\sin i$
 és $\cos i$ hatványai szerint: /ld. (6) -ot is/

$$F'_s = \sum_{k=0}^s A_{s,k} \sin^{2k} i \sum_{h=0}^{15} B_{k,h} \cos^h i$$

$$A_{s,k} = \frac{(30+2s+2k)!}{(s-k)! (15+s+k)! (2k)! 2^{30+2s+2k}} (-1)^s$$

$$B_{k,h} = \binom{15}{h} \sum_c \binom{2k+h}{c} \binom{15-h}{7+k-c} (-1)^c$$

F' a következő alakban állítható elő i többszörösei szerint:

$$F'_s(i) = \sum_{l=0}^{15+2s} H_{s,l} \cos^l i$$

ahol a $H_{s,l}$ koefфициensek $A_{s,k}$ -n és $B_{k,h}$ -n keresztül a következőképpen fejezhetők ki:

$$H_{s,l} = \sum_{k=\max\{0, E(\frac{l-14}{2})\}}^s (-1)^k A_{s,k} \sum_{p=0}^{7+k-E(\frac{l}{2})} B_{k, l-2k+2p} 2^{-(l+2p+1)} \sum_{c=0}^q \binom{l-2k+2p}{q-c} \binom{2k}{c} (-1)^c$$

Az E_s függvényrendszer most már könnyen felépíthető.

A sorozat első két eleme a következő alakú:

$$E_0(i) = \pi^{-1} \left\{ \sum_{l=0}^{15} H_{0,l}^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{15} H_{0,l} \cos^l i$$

$$E_1(i) = \pi^{-1} \left\{ \sum_{l=0}^{17} \overline{H}_{1,l}^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{17} \overline{H}_{1,l} \cos^l i$$

$$\overline{H}_{1,l} = H_{1,l} - \frac{\sum_{l=0}^{15} H_{0,l} \cdot H_{1,l}}{\sum_{l=0}^{15} H_{0,l}^2}$$

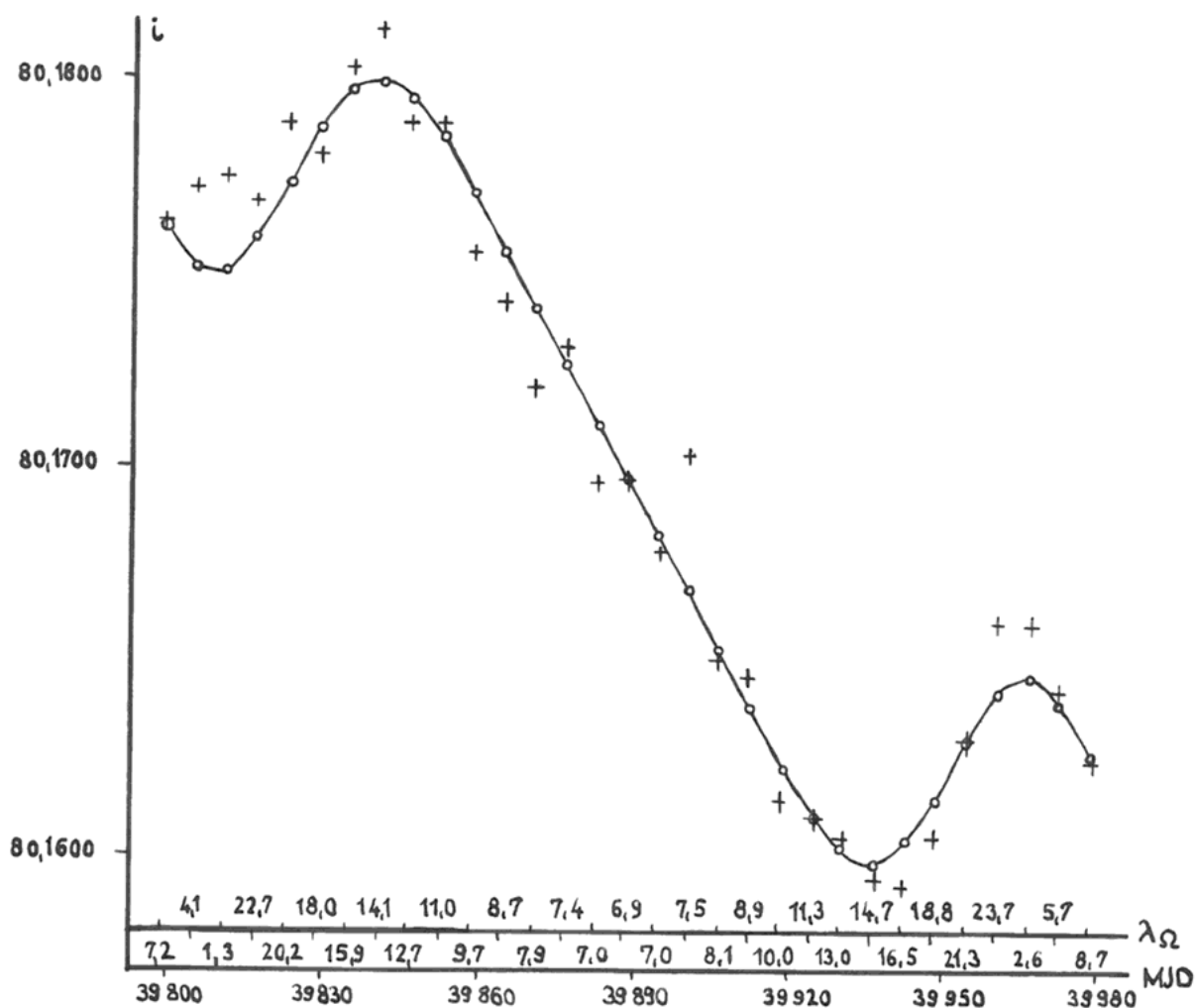
Ezután sorba kell fejtenünk az $a(i)$ függvényt i többszöröseinek cosinusai szerint, azután pedig már a koefficiensek egyszerű szorzása és összegezése útján megkapjuk a bal oldal E_s szerinti sorbafejtésének koefficienseit. Ahhoz, hogy az E_s függvény koefficiensét pontosan meg tudjuk határozni, előzetesen meg kell határoznunk c_{ki} koefficienseit $k = 15 + 2s$ -ig bezárólag. Másrészt, ha sikerül meghatároznunk c_{si} koefficiensét, és meggyőződünk arról, hogy a többi koefficiens lényegesen kisebb, már ez az egy érték is lehetőséget nyújt bizonyos becslésre az összes E_s melletti koefficiensre vonatkozóan. Az E_s függvényt az első $s+1$ $F'_s(i)$ függvény lineáris kombinációjaként állítottuk elő, ezért nyilvánvaló, hogy az E_s függvények szerint meghatározott sor egyértelműen átalakítható F'_s függvények szerinti sorrá. Ilyen módon megkapjuk az S'_s koefficiensek értékét, következésképpen az adott esetben az $S_{15+2s,15}$ /és ugyanúgy a $C_{15+2s,15}$ / koefficiensek meghatározásának feladata teljes egészében megoldható.

A [9]-ben közölték az Ariel-3 /67-42 A/ mesterséges hold pályaelemeit egy olyan időintervallumra, amely magába foglalta az $1/15$ összemérhetőségű rezonans állapotot. A munka szerzője észrevette, hogy a pálya inklinációja sajátos perturbációt szenved, és később egy rövid közleményben a perturbáció rezonans eredetére fordította a figyelmet. Kimutatható, hogy ha az észlelt perturbációt azon harmonikusok hatásának tulajdonítjuk, melyeknél $m = 15$, már elég jól leírható a jelenség. Feltételezzük,

hogy az $i = 80^{\circ}17$ inklinációjú kör alakú pályán keringő szputnyikok /ilyen volt az Ariel-3/ inklinációja λ_{Ω} függvényében a következő perturbációt szenved / i - mint közepes pályaelem - az egész intervallumra állandónak tekinthető/ :

$$\frac{di}{dt} = 2,56 \cdot 10^{-4} \sin 15(\lambda_{\Omega} - 14^{\circ}4) \quad (10)$$

Az 1. ábrán feltüntettük a mért és számított értékeket /keresztek illetve folytonos vonallal összekötött körök/. Az abszcisszatengelyen a Julián dátumokat valamint velük párhuzamosan az aktuális λ_{Ω} értékek közül a Föld egyenlítői ívének a Greevwichtól keletre eső 1/15 részéhez tartozót tüntettük fel.



1. ábra

A számításokat a következő módon végeztük: először kiszámítottuk λ_{Ω} értékét minden epochára /3 napos intervallummal/, utána pedig az $MJD=39889$; $i=80^{\circ}1697$ pontból kiindulva a Simpson-formula segítségével minden második epochára kiszámítottuk a Δi növekmény értékét. Mint látható, a grafikon igazolja azt a feltevést, hogy a vizsgált intervallumon a fő perturbáló tényező az $m=15$ rendű harmonikusok hatása volt. A további vizsgálat azt is megmutatja, hogy a (10) -ben szereplő 2,56 és $14^{\circ}4$ konstansok valószínű hibái nem haladják meg a 0,1 illetve 1° értéket. Ez lehetővé teszi, hogy a (9) és (10) -ből két összefüggést nyerjünk az $S_{15+2s,15}$ és $C_{15+2s,15}$ koefficiensek között:

$$\frac{\sin i}{n(15 - \cos i)} \cdot 2,56 \cdot 10^{-4} \cos(15 \cdot 14^{\circ}4) = - \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{R_E}{a}\right)^{15+2s} F'_s(80^{\circ}17) \cdot C_{15+2s,15}$$

$$\frac{\sin i}{n(15 - \cos i)} \cdot 2,56 \cdot 10^{-4} \sin(15 \cdot 14^{\circ}4) = - \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{R_E}{a}\right)^{15+2s} F'_s(80^{\circ}17) \cdot S_{15+2s,15}$$

Behelyettesítve a megfelelő számértékeket:

$$2,53 \cdot 10^{-9} = \sum_{s=0}^{\infty} (0,923)^{15+2s} F'_s(80^{\circ}17) \cdot C_{15+2s,15}$$

$$1,84 \cdot 10^{-9} = \sum_{s=0}^{\infty} (0,923)^{15+2s} F'_s(80^{\circ}17) \cdot S_{15+2s,15}$$

Csupán nagyságrendi becslés céljából folytatjuk a számítást, feltételezve, hogy az egész perturbációt a $C_{15,15}$ és $S_{15,15}$ koefficiensekhez tartozó harmonikusok okozzák. Végeredményben a következő értékeket kapjuk:

$$C_{15,15} = -1,45 \cdot 10^{-22}$$

$$S_{15,15} = -1,06 \cdot 10^{-22}$$

A normalizált $\overline{C}_{15,15}$ és $\overline{S}_{15,15}$ koeficiensekre pedig:

$$\overline{C}_{15,15} = -3,00 \cdot 10^{-7}$$

$$\overline{S}_{15,15} = -2,19 \cdot 10^{-7}$$

/ C_{nm} és \overline{C}_{nm} között a következő összefüggés áll fenn:

$$C_{n,m} = \left[\frac{(n-m)! (2n+1) \cdot 2}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \overline{C}_{nm}$$

és ugyanigy S_{nm} és \overline{S}_{nm} között./

Mint láttuk, az Ariel-3 esetében a rezonans állapot elég hosszú ideig állt fenn ahhoz, hogy azonnal meg tudjuk határozni di/dt értékét minden lehetséges λ_{Ω} -hoz, és ilyen módon fel tudjuk építeni /igaz, csak egy harmonikus pontosságával/ az $f(\lambda_{\Omega}) = di/dt$ függvényt. Mint az 1. ábra mutatja, a rezonancia maximális élességének pillanatában λ_{Ω} -nak extremuma van, és $f(\lambda_{\Omega})$ ebben a pontban határozható meg a legpontosabban. Általában az várható, hogy minden szputnyik rezonanciája módot nyújt $f(\lambda_{\Omega})$ meghatározására λ_{Ω} extremumának valamely körzetében. Ha adatokkal rendelkezünk több azonos inklinációjú szputnyik rezonanciájára vonatkozóan, melyeknél λ_{Ω} extremumai különbözőek, az adatok együttes feldolgozása lehetővé teheti $f(\lambda_{\Omega})$ pontosabb meghatározását. C_{nm} és S_{nm} végleges meghatározásához szükségünk van több, különböző inklinációjú szputnyik rezonanciájára vonatkozó adatra, és minden értékhez meg kell határozunk a megfelelő $f(\lambda_{\Omega})$ függvényt. Megkíséreltem ilyen információ elkülönítését a kéthetenként megjelenő NORAD /SPACETRACK/ pályaelemrendszerekből a következő szputnyikok pályaelemei alapján: 65-60 A, 65-60 B,

/ $i=28^{\circ}9'$, 62-06 B, 69-68 B, / $i=32^{\circ}9'$, 65-53 A, 65-53 C,
/ $i=54^{\circ}5'$, 67-108 A, 67-108 B, / $i=74^{\circ}0'$, 67-42 A, 67-42 B,
/ $i=80^{\circ}2'$. Kiderült, hogy bár a rezonancia hatása minden
esetben csaknem teljes bizonyossággal kimutatható, a mé-
rési pontok közötti nagy időintervallum és a mért értékek
nagy szórása miatt ezek a pályaelemek nem nyújtanak elég
információt az $f(\lambda_{\Omega})$ függvények kellő pontosságú nume-
rikus meghatározásához. Ezzel szemben a feldolgozás során
ezek a pályaelemek jól felhasználhatók, mint közepes pá-
lyaelemek.

Utószó

A NORAD pályaelemek vizsgálata mégis lehetővé tett
egy következtetést. A rezonancia hatása a vizsgált esetek
egyikében sem lehet sokkal nagyobb, mint az Ariel-3 ese-
tében, ezért $\overline{C}_{45+25,15}$ és $\overline{S}_{45+25,15}$ nagyságrendje legfel-
jebb 10^{-7} . Az Ariel-3 felhasznált pályaelemeit 1' közepes
hibájú rádióinterferométeres /MINITRACK/ észlelésekből
határozták meg. Ha rendelkezésre állna az Ariel-3 rezo-
nans állapotának idejére vonatkozó, néhány ivmásodpercnél
nem nagyobb hibákkal terhelt fotografikus észlelési anyag,
valószínűleg még az $\gamma_{e,30}$ és $\lambda_{e,30}$ paraméterekre vonat-
kozóan is meg lehetne bizonyos adatokat határozni.

Az i pályaelem választása a vizsgálatokhoz azért
kedvező, mert i kevésbé érzékeny a felső légkör irregu-
láris sűrűségváltozásaira, és ezen kívül az összes többi
perturbáló tényezővel szemben is eléggé stabilen viselkedik.

Irodalom

1. Hagihara Y.: Recommendations on Notation of the Earth Potential., *Astron. Journ.* 67. 108, 1962.
2. Doubochine, G.N.: Sur le Developpement de la Terre par les Fonctions de Lamé. Trajectories of Artificial Celestial Bodies, Springer-Verlag 1966.
3. Izsák I.G.: Tesseral Harmonics of the Geopotential and Correction to Station Coordinates. *Journ. Geop. Res.*, Vol. 69. 2621-2630. 1964.
4. Gaposchkin, E.M.: Improved Values for the Tesseral Harmonics of the Geopotential and Station Coordinates. *Dynamics of Satellites /1969/* Springer-Verlag 1970.
5. Kozai Y.: Revised Values for Coefficients of Zonal Spherical Harmonics in the Geopotential. *Smithsonian Astrophys. Obs. Spec. Rep. N°295*, 1969.
6. Szubbótyin, M.F.: Vvegyenyije v tyeoretyicseszkuju asztronómiju. Naúka 1968.
7. Korn, G., Korn, T.: Szpravocsnyik po matyematyike. Naúka 1968.
8. Kaula, W.M.: Theory of Satellite Geodesy. Waltham, Mass. Blaisdell Press 1966.
9. Gooding, R.H.: The Orbit of Ariel-3. Royal Aircraft Establishment, Technical Report 69275, 1969.
10. Wagner, C.A., Douglas, B.C.: Resonant Satellite Geodesy by High Speed Analysis of Mean Kepler Elements. *Dynamics of Satellites /1969/* Springer-Verlag 1970.
11. Wagner, C.A., Douglas, B.C.: Perturbations of Existing Resonant Satellites. *Plan. and Space Sci.* 17, 8. 1969.